

УДК 510.67

МРНТИ 27.03.66

<https://doi.org/10.55452/1998-6688-2025-22-1-223-228>

^{1,2*}Кулпешов Б.Ш.,

доктор физико-математических наук, профессор,

ORCID ID: 0000-0002-4343-0463,

*e-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

² Неталиева Е.К.,

студент, ORCID ID: 0009-0000-6154-2602,

e-mail: e_netalieva@kbtu.kz

¹ Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

² Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы, Казахстан

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ

Аннотация

В настоящей статье мы исследуем сильно минимальные частичные порядки в сигнатуре, содержащей только символ бинарного отношения, выражающего частичный порядок. Мы используем для частичных порядков такие характеристики, как высота структуры, означающая супремум длин упорядоченных цепей, и ширина структуры, означающая супремум длин антицепей, где антицепь – это множество попарно несравнимых элементов. Здесь мы исследуем сильно минимальные частичные порядки, имеющие бесконечную нетривиальную ширину. Основным результатом статьи – критерий сильной минимальности бесконечного частичного порядка высоты два, имеющие бесконечную нетривиальную ширину.

Ключевые слова: сильно минимальная структура, частичный порядок, связная компонента, максимальный элемент, минимальный элемент.

Введение

Вспомним [1], что бесконечная структура M называется *минимальной*, если для любой формулы $\varphi(x)$ языка структуры M с параметрами из M либо $\varphi(M)$, либо $\neg\varphi(M)$ конечно. Теория T без конечных моделей называется *сильно минимальной*, если каждая модель теории T является минимальной. Модели сильно минимальной теории также называются сильно минимальными.

Вспомним, что отношение частичного порядка на множестве есть бинарное отношение $<$, удовлетворяющее следующим свойствам:

Асимметрия $\forall x \forall y [x < y \rightarrow \neg(y < x)]$;

Транзитивность $\forall x \forall y \forall z [(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$.

Множество с частичным порядком на нем называется *частично упорядоченным множеством* или просто *частичным порядком*.

Следующая теорема описывает сильно минимальные частичные порядки, имеющие конечную нетривиальную ширину:

Теорема 1 [2, 3] *Бесконечный частичный порядок $M = \langle M, < \rangle$, имеющий конечную нетривиальную ширину, является сильно минимальным тогда и только тогда, когда M имеет бесконечное число синглетов и дополнительно может иметь лишь конечное число конечных связных компонент, не являющихся синглетами.*

В недавней статье [3] были полностью описаны сильно минимальные частичные порядки, имеющие конечную нетривиальную ширину. Здесь мы исследуем сильно минимальные частичные порядки, имеющие бесконечную нетривиальную ширину. В настоящее время класс сильно

минимальных теорий является объектом активных исследований. В работе [4] исследованы свойства рангов семейств сильно минимальных теорий. В работе [5] были получены некоторые интересные результаты, обеспечивающие более тонкую классификацию сильно минимальным структур с плоской геометрией.

Материалы и методы

Здесь мы исследуем частичные порядки в сигнатуре, содержащей лишь бинарное отношение частичного порядка. Методами исследований являются классические методы теории моделей, в частности, методы исследования сильно минимальных структур.

Результаты и обсуждение

Вспомним, что элемент a частичного порядка M называется *минимальным*, если не существует элемента в M , меньшего a . Также, элемент a частичного порядка M называется *максимальным*, если не существует элемента в M , большего a . Заметим, что любой синглетон частичного порядка является как максимальным, так и минимальным элементом данного упорядочения. Также, любой максимальный (минимальный) элемент нетривиальной связной компоненты частичного порядка не является минимальным (максимальным).

Пример 2 Пусть $M = \langle M, < \rangle$ — частичный порядок, состоящий в точности из одной бесконечной нетривиальной компоненты высоты два с единственным максимальным элементом. Тогда очевидно, что M является сильно минимальной структурой, имеющей бесконечную нетривиальную ширину.

Теорема 3 Пусть $M = \langle M, < \rangle$ — бесконечный частичный порядок высоты два, имеющий бесконечную нетривиальную ширину. Тогда M является сильно минимальным тогда и только тогда, когда имеет место следующее:

- (1) M содержит в точности одну нетривиальную связную компоненту высоты два, имеющую как бесконечное множество максимальных (минимальных) элементов и непустое конечное множество минимальных (максимальных) элементов;
- (2) Если M содержит в точности t минимальных (максимальных) элементов бесконечной верхней (нижней) степени для некоторого $1 \leq t < \omega$, то почти все максимальные (минимальные) элементы имеют нижнюю (верхнюю) степень t ;
- (3) M содержит лишь конечное число конечных связных компонент высоты не более двух.

Доказательство теоремы 3. ($\Rightarrow$) Пусть M — сильно минимальная структура. Поскольку M имеет бесконечную нетривиальную ширину, M содержит бесконечное число нетривиальных связных компонент или хотя бы одну бесконечную нетривиальную связную компоненту. Если M содержит бесконечное число нетривиальных связных компонент, то мы получаем, что M содержит как бесконечное число минимальных элементов, так и бесконечное число максимальных элементов. Последнее противоречит сильной минимальности структуры M . Следовательно, M содержит лишь конечное число нетривиальных связных компонент. ... $\square$

Вспомним, что теория первого порядка называется *тотально категоричной*, если она имеет единственную модель с точностью до изоморфизма в каждой бесконечной мощности.

Следствие 4 Любой сильно минимальный частичный порядок высоты два, имеющий бесконечную нетривиальную ширину, является тотально категоричным.

Заключение

Таким образом, мы получили полное описание сильно минимальных частичных порядков высоты два, имеющих бесконечную нетривиальную ширину. В качестве следствия установлено, что такие сильно минимальные частичные порядки являются тотально категоричными.

Информация о финансировании

Работа поддержана Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант BR20201001.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baldwin J.T., Lachlan A.H., On strongly minimal sets. The Journal of Symbolic Logic, 36 (1), 79–96 (1971).
2. Кулпешов Б.Ш., Павлюк Ин.И., Судоплатов С.В. О псевдо-сильно-минимальных формулах, структурах и теориях. Теория моделей и алгебра 2024, Сборник статей под редакцией М. Шахриари и С.В. Судоплатова, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 2024, С. 42–47.
3. Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V., Pseudo-strongly-minimal structures and theories. Lobachevskii Journal of Mathematics, 45 (12), 6515–6525 (2024).
4. Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., Properties of ranks for families of strongly minimal theories. Siberian Electronic Mathematical Reports, 19 (1), 120–124 (2022).
5. Baldwin J.T., Verbovskiy V.V., Towards a finer classification of strongly minimal sets. Annals of Pure and Applied Logic, 175, Number 103376 (2024).

REFERENCES

1. Baldwin J.T., Lachlan A.H., On strongly minimal sets. The Journal of Symbolic Logic, 36 (1), 79–96 (1971).
2. Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V. On pseudo-strongly-minimal formulae, structures and theories. Model Theory and Algebra 2024, Collection of papers edited by M. Shahryari and S.V. Sudoplatov, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 2024, pp. 42–47.
3. Kulpeshov B.Sh., Pavlyuk In.I., Sudoplatov S.V., Pseudo-strongly-minimal structures and theories. Lobachevskii Journal of Mathematics, 45 (12), 6515–6525 (2024).
4. Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., Properties of ranks for families of strongly minimal theories. Siberian Electronic Mathematical Reports, 19 (1), 120–124 (2022).
5. Baldwin J.T., Verbovskiy V.V., Towards a finer classification of strongly minimal sets. Annals of Pure and Applied Logic, 175, Number 103376 (2024).

^{1,2*}Кулпешов Б.Ш.,
ф.-м.ф.д., профессор, ORCID ID: 0000-0002-4343-0463,
*e-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

² Неталиева Е.К.,
студент, ORCID ID: 0009-0000-6154-2602,
e-mail: e_netalieva@kbtu.kz

¹ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

² Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ НА КАЗАХСКОМ ЯЗЫКЕ

Аңдатпа

Бұл зерттеуде біз жартылай ретті білдіретін бинарлық қатынастың таңбасымен ғана анықталатын қол таңбалардағы күшті минималды жартылай реттіліктерді талдаймыз. Жартылай реттіліктер үшін құрылымның биіктігі (реттелген тізбектердің ұзындықтарының жоғарғы шегі) және құрылымның ені (антитізбектердің ұзындықтарының жоғарғы шегі) сияқты сипаттамалар қолданылады. Мұнда антитізбек деп өзара салыстырылмайтын элементтер жиынтығы түсіндіріледі. Осы жұмыста біз шексіз тривиалды емес ені бар күшті минималды жартылай реттіліктерді қарастырамыз. Мақаланың негізгі нәтижесі – шексіз тривиалды емес ені бар және биіктігі екіге тең шексіз жартылай реттіліктердің күшті минималдылығы үшін қажетті және жеткілікті шарттың анықталуы.

Тірек сөздер: күшті минималды құрылым, жартылай реттілік, жалғанған компонент, максималды элемент, минималды элемент.

^{1,2*}Kulpeshov B.Sh.,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

ORCID ID: 0000-0002-4343-0463,

*e-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

² Netaliyeva Ye.K.,

Student, ORCID ID: 0009-0000-6154-2602,

e-mail: e_netaliyeva@kbtu.kz

¹ Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

² Kazakh-British Technical University, Almaty, Kazakhstan

TITLE OF PAPER IN ENGLISH

Abstract

In the present paper, we study strongly minimal partial orderings in the signature containing only the symbol of binary relation of partial order. We use for partial orderings such characteristics as the height of a structure that is the supremum of lengths of ordered chains, and the width of a structure that is the supremum of lengths of antichains, where an antichain is a set of pairwise incomparable elements. Here we study strongly minimal partial orderings having an infinite non-trivial width. The main result of the paper is a criterion for strong minimality of an infinite partial ordering of height two having an infinite non-trivial width.

Key words: strongly minimal structure, partial ordering, connected component, maximal element, minimal element.

Received: January 30, 2026; revised: March 5, 2026; accepted: March 13, 2026.